

# Cours – Séquence n° 17 – PROBABILITÉS (II) :

## sommes de variables aléatoires

### I- VARIABLES ALÉATOIRES $X + Y$ ET $aX$

#### Exemple d'introduction

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :

- pour le premier jeu, par la variable aléatoire  $X$  qui prend les valeurs 1 et 2.
- pour le second jeu, par la variable aléatoire  $Y$  qui prend les valeurs -2, 3 et 4.

Par exemple, l'événement  $\{X = 1\} \cap \{Y = -2\}$  signifie qu'on a gagné 1 € au 1<sup>er</sup> jeu et perdu 2 € au 2<sup>ème</sup> jeu.

Considérons la variable aléatoire somme  $X + Y$  donnant le gain total cumulé aux deux jeux.

- Alors la variable aléatoire  $X + Y$  peut prendre les valeurs : -1 ; 0 ; 4 ; 5 et 6.  
En effet, on a par exemple  $X + Y = 0$  avec  $\{X = 2\} \cap \{Y = -2\}$ .
- Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'événement  $X + Y = 5$ , on cherche toutes les sommes  $X + Y$  égales 5. Ainsi,  $P(X + Y = 5) = P(\{X = 1\} \cap \{Y = 4\}) + P(\{X = 2\} \cap \{Y = 3\})$ .

#### Définitions

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.

$X$  prend les valeurs  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $Y$  prend les valeurs  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , avec  $n$  et  $m$  entiers naturels non nuls.

1. **La variable aléatoire  $X + Y$**  prend toutes les valeurs possibles  $a_i + b_j$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ .
2. **Loi de probabilité de  $X + Y$** : pour toute valeur  $w$  prise par  $X + Y$ ,  $P(X + Y = w)$  est la somme de toutes les probabilités  $P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\})$  où  $a_i + b_j = w$ .

#### Exemple

En période de réglage de ses machines, un contrôleur qualité d'une usine effectue de nombreux prélèvements dans la production et relève, pour chaque pièce, si elle a un défaut A ou un défaut B. Compte tenu du grand nombre de pièces prélevées, les fréquences indiquées dans ce tableau peuvent être assimilées à des probabilités.

| X \ Y    | 0    | 1    | 2    | Loi de X |
|----------|------|------|------|----------|
|          | 0    | 1    | 2    |          |
| 0        | 0,07 | 0,18 | 0,17 | 0,42     |
| 1        | 0,15 | 0,20 | 0,23 | 0,58     |
| Loi de Y | 0,22 | 0,38 | 0,40 | 1        |

$X$  (respectivement  $Y$ ) est la variable aléatoire qui compte le nombre de défauts A (respectivement B).

Dans le tableau figurent les valeurs entières prises par la variable aléatoire somme  $S = X + Y$ .

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de  $S$  :

| s          | 0    | 1    | 2    | 3    |
|------------|------|------|------|------|
| $P(S = s)$ | 0,07 | 0,33 | 0,37 | 0,23 |

**Définitions**

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur l'univers d'une expérience aléatoire.

$X$  prend les valeurs  $a_1, a_2, \dots, a_n$  avec  $n$  un entier naturel non nul.

Soit  $a$  un nombre réel différent de 0.

1. **La variable aléatoire  $aX$**  prend toutes les valeurs possibles  $a \times a_i$  avec  $1 \leq i \leq n$ .
2. **Loi de probabilité de  $aX$**  : pour toute valeur  $w$  prise par  $aX$ ,  **$P(aX = w)$**  est la somme de toutes les probabilités  $P(\{X = a_i\})$  où  $a \times a_i = w$ .

**Exemple**

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.  $X$  est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu et  $Y$  est la variable aléatoire qui donne le double de ce numéro. Alors  $Y = 2X$ .

**Propriétés (admisses) : linéarité de l'espérance**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même univers.  
Soit  $a$  un nombre réel différent de 0.

$$1) E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

$$2) E(aX) = a E(X).$$

**Exemple**

Reprenons l'exemple de réglage des machines.

- $E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = 0 \times 0,42 + 1 \times 0,58 = 0,58$
- $E(Y) = \sum_{i=1}^6 y_i p_i = 0 \times 0,22 + 1 \times 0,38 + 2 \times 0,4 = 1,18$
- $E(X) + E(Y) = 0,58 + 1,18 = 1,76$
- $E(X + Y) = E(S) = \sum_{i=1}^4 s_i p_i = 0,07 \times 0 + 1 \times 0,33 + 2 \times 0,37 + 3 \times 0,23 = 1,76$
- On constate bien que  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

## II- VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

### Exemple d'introduction

Dans l'exemple d'introduction précédent :  $P(X + Y = 5) = P(\{X = 1\} \cap \{Y = 4\}) + P(\{X = 2\} \cap \{Y = 3\})$ .

Si de plus, les événements  $\{X = 1\}$  et  $\{Y = 4\}$  sont indépendants, ainsi que les événements  $\{X = 2\}$  et  $\{Y = 3\}$ , alors on a :

$$P(X + Y = 5) = P(X = 1) \times P(Y = 4) + P(X = 2) \times P(Y = 3).$$

### Définitions

On effectue successivement deux épreuves aléatoires indépendantes l'une de l'autre.

Ainsi, l'issue de la première épreuve n'influence pas l'issue de la seconde.

On note  $X$  (resp.  $Y$ ) la variable aléatoire qui donne le résultat de la première (resp. seconde) épreuve.

$X$  prend les valeurs  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $Y$  prend les valeurs  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , avec  $n$  et  $m$  entiers naturels non nuls.

1. On dit que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes**.
2. Les événements  $\{X = a_i\}$  et  $\{Y = b_j\}$  sont **indépendants** et  $P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = P(X = a_i) \times P(Y = b_j)$  avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ .

### Exemple

On lance successivement deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à six faces numérotées 0 ; 3 ; 3 ; 6 ; 6 et 6.

$X$  (resp.  $Y$ ) est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le premier (resp. second) dé.

Les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, car les deux lancers de dés le sont.

Ainsi, par exemple,  $P(\{X = 1\} \cap \{Y = 3\}) = P(X = 1) \times P(Y = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

### Propriétés (admisses) : variance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un même univers.

Soit  $a$  un nombre réel différent de 0.

1)  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

⚠ 2)  $V(aX) = a^2 V(X)$ .

### Exemple

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites.

Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.

L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.

La loi de probabilité de  $X$  est résumée dans le tableau suivant :

|              |       |       |     |       |       |
|--------------|-------|-------|-----|-------|-------|
| $x_i$        | 1,298 | 1,299 | 1,3 | 1,301 | 1,302 |
| $P(X = x_i)$ | 0,2   | 0,1   | 0,2 | 0,4   | 0,1   |

On souhaite calculer l'espérance et l'écart-type de  $X$ .

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire  $Y = 1000X - 1300$ . La loi de probabilité de  $Y$  est alors :

|              |     |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $y_i$        | -2  | -1  | 0   | 1   | 2   |
| $P(Y = y_i)$ | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

- Calculons l'espérance de Y :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = -2 \times 0,2 + (-1) \times 0,1 + 0 \times 0,2 + 1 \times 0,6 + 2 \times 0,1 = 0,1$$

- Calculons la variance de Y :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^5 p_i (y_i - E(Y))^2 = 0,2 \times (-2 - 0,1)^2 + 0,1 \times (-1 - 0,1)^2 + \dots = 1,69$$

- Déduisons l'espérance de X :

$$Y = 1000X - 1300, \text{ donc } E(Y) = E(1000X - 1300)$$

$$E(Y) = E(1000X) - E(1300), \text{ par linéarité}$$

$$E(Y) = 1000E(X) - 1300, \text{ par linéarité}$$

$$\text{Donc } E(X) = \frac{E(Y) + 1300}{1000}$$

$$E(X) = \frac{0,1 + 1300}{1000} = 1,3001 \text{ cm}$$

Cela signifie que le diamètre d'une bille sera, en moyenne, de 1,3001 cm.

- Déduisons la variance puis l'écart-type de X et interprétons cette dernière valeur.

$$Y = 1000X - 1300, \text{ donc } V(Y) = V(1000X - 1300)$$

$$V(Y) = V(1000X) + V(1300) \quad \text{car } 1000X \text{ et } -1300 \text{ sont indépendantes}$$

$$V(Y) = 1000^2 V(X) + 0$$

$$V(X) = \frac{V(Y)}{10^6}$$

$$V(X) = \frac{1,69}{10^6}$$

$$\text{Donc } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1,69}{10^6}}$$

$$\sigma(X) = \frac{1,3}{10^3} = 0,0013 \text{ cm}$$

Cela signifie que, en moyenne, le diamètre d'une bille dans l'intervalle  $[E(X) - \sigma(X); E(X) + \sigma(X)]$ , c'est-à-dire dans  $[1,2988; 1,3014]$

### Propriétés : application à la loi binomiale

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

1)  $E(X) = np$

2)  $V(X) = np(1 - p)$

3)  $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Démonstration \*

On note  $X_i$  (avec  $1 \leq i \leq n$ ) la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès à la  $i$ -ème épreuve et 0 sinon. Chaque variable aléatoire  $X_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

$$\forall i \in \{1; \dots; n\}, E(X_i) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p.$$

$$\forall i \in \{1; \dots; n\}, V(X_i) = p \times (1 - p)^2 + (1 - p) \times (0 - p)^2 = (1 - p) \times (p(1 - p) + p^2) = p(1 - p).$$

Or,  $X = X_1 + \dots + X_n$  et  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.

En généralisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une somme de deux variables au cas de  $n$  variables, on obtient :

- $E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + p + \dots + p = np$ . *par linéarité*
- $V(X) = V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = p(1 - p) + p(1 - p) + \dots + p(1 - p) = np(1 - p)$ . *par indépendance*
- On en déduit  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1 - p)}$ .

Exemple

On lance 5 fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.

On considère la variable aléatoire  $S$  donnant le nombre de succès.

Calculer  $E(S)$ ,  $V(S)$  et  $\sigma(S)$ . Interpréter  $E(S)$  et  $\sigma(S)$ .

### III- SOMME ET MOYENNE D'UN ÉCHANTILLON

#### Définition

Un **échantillon de taille  $n$  d'une loi de probabilité** est une liste  $(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$  de  $n$  variables aléatoires **indépendantes et identiques** qui suivent toutes cette loi.

#### Exemple

Laëtitia prend le même train cinq jours par semaine. On admet que la variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de retards suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(5 ; 0,1)$ . En répétant cette expérience pendant 8 semaines, on construit un échantillon  $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5 ; X_6 ; X_7 ; X_8)$  de taille 8 de cette loi de probabilité.

#### Définition

Soit  $(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$  un échantillon de taille  $n$  d'une loi de probabilité suivie par une variable aléatoire  $X$ . La **somme** de cet échantillon est la variable aléatoire  **$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$** .

#### Propriétés :

Soit  $S_n$  la somme d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire  $X$ .

- 1)  $E(S_n) = n E(X)$
- 2)  $V(S_n) = n V(X)$
- 3)  $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$

#### Démonstration

- 1)  $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ , par linéarité  
Or, toutes les variables aléatoires  $X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n$  suivent la même loi de probabilité que  $X$ .  
Donc  $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = E(X)$ . On en déduit que  $E(S_n) = n E(X)$ .
- 2)  $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ . Or, les variables aléatoires  $X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n$  sont indépendantes.  
Donc  $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$ .  
Et toutes les variables aléatoires  $X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n$  suivent la même loi de probabilité que  $X$ .  
Donc  $V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_n) = V(X)$ . On en déduit que  $V(S_n) = n V(X)$ .
- 3) On en déduit que  $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{n V(X)} = \sqrt{n} \times \sqrt{V(X)} = \sqrt{n} \times \sigma(X)$ .

#### Exemple

Le Yam's est un jeu dans lequel on lance cinq dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6, pour obtenir certaines combinaisons particulières. Pour l'une de ces combinaisons, appelée Chance, on marque la somme des numéros obtenus avec les cinq dés.

Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre de points que l'on peut ainsi obtenir.

- Soit  $X$  la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec un dé.  
Voici la loi de probabilité de  $X$  :

| a      | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| P(X=a) | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

- Un lancer de cinq dés est alors un échantillon  $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5)$  de taille 5 de la loi de probabilité suivie par  $X$ . En effet, le résultat de chaque dé est indépendant des autres, donc les variables  $X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5$  sont indépendantes.
- La variable aléatoire  $S_5$  somme de cet échantillon compte ainsi le nombre total de points obtenus.
- À l'aide de la calculatrice, on obtient :  $E(X) = 3,5$  et  $\sigma(X) \approx 1,7$ .
- Donc  $E(S_5) = 5 \times E(X) = 5 \times 3,5 = 17,5$  et  $\sigma(S_5) = \sqrt{5 \times V(X)} \approx \sqrt{5 \times 1,7^2} \approx 3,8$ .

**Définition**

Soit  $(X_1; X_2; \dots; X_n)$  un échantillon de taille  $n$  d'une loi de probabilité suivie par une variable aléatoire  $X$ .

Soit  $S_n$  la variable aléatoire désignant la somme de cet échantillon.

La **moyenne** de cet échantillon est la variable aléatoire  $M_n = \frac{S_n}{n}$ .

**Propriétés :**

Soit  $M_n$  la moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire  $X$ .

1)  $E(M_n) = E(X)$

2)  $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$

3)  $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

**Démonstration**

1) On sait que pour tout réel  $a \neq 0$ ,  $E(aX) = aE(X)$ .

$$\text{Donc } E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X).$$

2) On sait aussi que pour tout réel  $a \neq 0$ ,  $V(aX) = a^2V(X)$ .

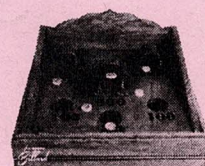
$$\text{Donc } V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}.$$

3) On en déduit que  $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n}} = \frac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ .

**Exemple**

Pendant la fête de l'école, Constantine a prévu de jouer 10 fois au jeu de la grenouille, dans lequel elle peut gagner un certain nombre de points notés  $X$ . Voici la loi de probabilité de  $X$  :

| $a$      | 0   | 5   | 10  | 20   | 50   | 100  |
|----------|-----|-----|-----|------|------|------|
| $P(X=a)$ | 0,6 | 0,2 | 0,1 | 0,06 | 0,03 | 0,01 |



Déterminer l'espérance et l'écart-type du gain moyen par partie pour une série de 10 parties.

- Les dix parties sont indépendantes les unes des autres, donc elles constituent un échantillon  $(X_1; X_2; \dots; X_{10})$  de taille 10 de la loi de probabilité suivie par  $X$ .
- La variable aléatoire  $M_{10} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}{10}$  moyenne de cet échantillon modélise alors le gain moyen.
- À l'aide de la calculatrice, on obtient :  $E(X) = 5,7$  et  $\sigma(X) \approx 13,5$
- Donc  $E(M_{10}) = E(X) = 5,7$  et  $\sigma(M_{10}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \approx \frac{13,5}{\sqrt{10}} \approx 4,3$